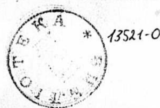
ПРЕДМЕТЪ ТЕОРІИ ЧИСЕЛЪ И ОТНОШЕНІЕ ЕЯ КЪ ДРУГИМЪ ОТДѢЛАМЪ МАТЕМАТИКИ *).

Ѳ. А. Слудскаго.

И въ наше время приводится еще выслушивать мнѣнія о безполезности той или другой науки. Приводится выслушивать ихъ и отъ людей, ограничившихся общимъ образованіемъ, и отъ спеціалистовъ не того отдѣла, къ которому принадлежитъ осуждаемая въ безполезности наука, и наконецъ отъ спеціалистовъ этого отдѣла. На мнѣнія первыхъ можно, а пожалуй и должно, не обращать вниманія; мнѣнія вторыхъ, болѣе почтенныя, можно объяснить свойственнымъ каждому спеціалисту увлеченіемъ предметомъ своей спеціальности и, объяснивши такимъ образомъ, пройти мимо ихъ, не останавливаясь; на мнѣніяхъ третьихъ необходимо остановиться. Эти послѣднія мнѣнія могутъ быть односторонни, но не могутъ быть лишены всякихъ основаній. Знакомство съ ихъ основаніями во всякомъ случаѣ довольно интересно. Оно можетъ не убѣдить въ безполезности науки, но необходимо укажетъ нѣкоторыя ея недостатки, нѣкоторыя ея слабыя стороны, — укажетъ, чего можно желать относительно ея, къ чему должно въ ней стремиться.

Кто не слыхалъ отъ спеціалистовъ математиковъ, что теорія чиселъ — наука безполезная? Кто не слыхалъ отъ нихъ, что эта наука возникла и развилась вслѣдствіе прихоти и

*) Изъ вступительной лекціи, читанной въ январѣ 1864 года, въ Московскомъ Университетѣ.



избытка свободнаго времени у нѣкоторыхъ ученыхъ? Кто не слыхалъ, что ея изученіе — дѣло роскоши?

Нельзя не спросить, на чѣмъ основываются такія сужденія математиковъ о теоріи чиселъ. Если странно слышать мнѣніе о безполезности какой бы то ни было науки, то еще страннѣе слышать такого рода мнѣніе относительно теоріи чиселъ. Вѣдь она часть чистой математики — науки, въ пользѣ которой ни кто не сомнѣвается. Какъ же можетъ быть безполезна часть полезнаго цѣлаго? Почему полезна математика и безполезна теорія чиселъ?

Математика полезна, какъ могущественное орудіе для изученія явленій природы, какъ наука, дающая способы для рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ общественной жизни. Полезна она на столько, на сколько служитъ двумъ этимъ цѣлямъ; полезна потому не вся она, а только тѣ ея части, которыя занимаются мірами существующихъ въ дѣйствительности соотношеній между величинами, а не созданныхъ воображеніемъ ученаго. Предметъ теоріи чиселъ — соотношенія послѣдняго рода; потому она безполезна.

Такъ говорятъ обыкновенно лица, признающіе безполезной теорію чиселъ. — Нельзя согласиться, что эта наука занимается не существующими въ дѣйствительности соотношеніями между величинами, обративши вниманіе на существующія уже, хотя немногочисленныя, приложенія ея къ геометріи и физикѣ; нельзя согласиться за тѣмъ, что математика важна и полезна только какъ наука вспомогательная. Но, еслибъ мы согласились даже съ тѣмъ и другимъ, то и въ такомъ случаѣ не могли бы убѣдиться въ безполезности теоріи чиселъ. Математика важна какъ орудіе; но чтобъ съ успѣхомъ пользоваться какимъ нибудь орудіемъ, нужно изучить его хорошо, до малѣйшихъ подробностей, во всѣхъ его частяхъ. Кто не знаетъ, что послѣ такого только изученія можно владѣть орудіемъ сознательно, а не по рецептамъ, сочиненнымъ какимъ нибудь мастеромъ,—что послѣ такого только изученія можно сдѣлаться мастеромъ. И такъ, если математика важна и полезна, то важна и полезна вся она, всѣ ея части.

Чѣмъ же можно объяснить мнѣнія о безполезности теоріи чиселъ? Единая ли цѣлая наука математика? Не колонія ли она наукъ раздѣльныхъ, въ разной степени важныхъ и полезныхъ? Не собраніе ли она истинъ, не систематизированное, не составляющее стройнаго цѣлаго, — собраніе, въ которомъ можно изучить кое что и претендовать за тѣмъ на полноту и законченность знаній съ тѣмъ же правомъ, какъ по изученіи всего? — Что чистая математика не колонія раздѣльныхъ наукъ, — въ этомъ убѣдиться не трудно; что она есть собраніе истинъ, не достаточно еще систематизированное, — съ этимъ до нѣкоторой степени необходимо согласиться. Если мы обратимъ вниманіе на ту массу истинъ, которая составляетъ содержаніе чистой математики, если мы затѣмъ изучимъ ее въ томъ видѣ, въ какомъ она обыкновенно излагается, то изъ этого изученія мы можемъ не вынести убѣжденія въ стройности и цѣлостности науки. Впечатлѣніе, которое мы вынесемъ, будетъ подобно тому, какое производитъ на зрителя зданіе строящееся, — зданіе, въ которомъ отдѣланы весьма немногія части, а для отдѣлки другихъ еще заготовляются только матеріалы, — зданіе, плана котораго нѣтъ въ рукахъ осматривающаго. Вѣдь не всякій можетъ составить себѣ ясное цѣлостное понятіе о такомъ зданіи на основаніи того, что онъ видитъ: это дается не многимъ избраннымъ.

Вотъ что объяснитъ намъ, почему нѣкоторыя части чистой математики, а въ томъ числѣ и теорія чиселъ, могутъ казаться безполезными. Ограниченное число приложеній и видимое отсутствіе неразрывной связи съ другими частями достаточны, чтобы подвергнуть сомнѣнію ихъ важность и пользу.

Мысль о недостаткѣ систематичности и цѣлостности въ чистой математикѣ можетъ показаться странною, такъ какъ всѣ привыкли считать математику совершеннѣйшею изъ наукъ. Но съ этой мыслью легко помириться, обративши вниманіе на характеръ и исторію науки.

Математика возникла тогда, когда прошелъ золотой вѣкъ, когда настала потребность считать, мѣрять и вѣшать. Люди сосчитали свои стада, считали то, другое, третіе, и убѣдились наконецъ, что счетъ подлежитъ нѣкоторымъ общимъ законамъ, независимымъ отъ счисляемыхъ предметовъ. Возникла идея о величинахъ абстрактныхъ, идея о количествѣ — предметѣ математики. Родилась ариѳметика. Уже въ этой первоначальной идеѣ о количествѣ былъ задатокъ на безграничное развитіе математики. Но къ счастію ученые не отрѣшились отъ земли, не увлеклись первымъ импульсомъ, не поставили себѣ задачей идти по пути имп намѣченному. Этотъ путь привелъ бы только къ безконечному ряду ариѳметическихъ дѣйствій, связанныхъ тѣмъ же общимъ закономъ, который соединяетъ извѣстныя теперь простыя ариѳметическія дѣйствія. Какой былъ бы тутъ толкъ?

За ариѳметикой возникла алгебра и опять-таки не изъ отвлеченной идеи о количествѣ, а изъ рѣшеній вопросовъ жизни, изъ рѣшеній вопросовъ первой прикладной математической науки — геометріи. Идея о количествѣ съ возникновеніемъ алгебры расширилась; она стала вдвое безграничнѣе. Извлечь всѣ слѣдствія изъ нея, воплотить ее въ рядѣ математическихъ истинъ, стало вдвое невозможнѣе. Пришлось заняться главнымъ образомъ изслѣдованіемъ тѣхъ только истинъ, которыя имѣютъ интересъ и важность по ихъ приложеніямъ.

Такимъ же путемъ, какъ ариѳметика и алгебра, образовались и другія части математики. — Отсюда возникла полная почти зависимость чистаго анализа отъ прикладныхъ математическихъ наукъ. Вопросы, задаваемые ему послѣдними, считались и наиболѣе интересными и наиболѣе важными вопросами; на разработку ихъ устремлялась главнымъ образомъ дѣятельность математиковъ. Такое отношеніе чистой математики къ прикладной было, съ одной стороны, довольно выгодно для первой. Благодаря ему она такъ калоссально развилась; благодаря ему составилось лестное мнѣніе о математикѣ, какъ наукѣ совершеннѣйшей, какъ наукѣ могущественной, какъ наукѣ не знающей преградъ. Но съ другой стороны оно было и не довольно выгодно. Быстрое развитіе прикладныхъ наукъ подняло огромную массу вопросовъ въ чистой математикѣ. Не было возможности думать объ общихъ способахъ ихъ рѣшеній; пришлось пользоваться пріемами частными, крайне искуственными, повидимому, такъ какъ не было времени ихъ сравнивать и приводить къ общимъ началамъ.— Масса математическихъ истинъ, собранныхъ такимъ путемъ,— довольно пестрая масса, которую трудно связать одною общею идеею.

Если о степени развитія науки судить не по многочисленности и важности фактовъ, ее составляющихъ, а по систематичности въ группировкѣ всей массы фактовъ, какъ судятъ вообще, то можно сказать, что чистая математика еще въ дѣтствѣ. Она принадлежитъ къ числу наукъ, въ которыхъ не сформировалось еще надлежащимъ образомъ дѣленіе на части. Съ идеею о части науки соединяется понятіе о рядѣ истинъ, составляющемъ что то цѣлое въ самомъ себѣ, достаточно разграниченное съ другими рядами истинъ. Но не таковы части чистой математики: онѣ взаимно переплетаются.

Чтобъ сказанное сейчасъ не показалось голословнымъ, обратимъ вниманіе на взаимное отношеніе двухъ наиболѣе установившихся, наиболѣе законченныхъ частей математики: ариѳметики и алгебры; обратимъ вниманіе тѣмъ болѣе, что знакомство съ отношеніемъ ихъ имѣетъ для насъ значительный интересъ вслѣдствіе тѣсной ихъ связи съ теоріей чиселъ.

Что такое ариѳметика? Что такое алгебра? Въ какомъ онѣ находятся отношеніи? Отвѣта на эти вопросы, очевидно, нужно искать въ принятыхъ опредѣленіяхъ наукъ. Какой же отвѣтъ дадутъ намъ опредѣленія?

Ариѳметика есть наука о числахъ,— она изучаетъ дѣйствія надъ числами; алгебра есть наука о величинахъ вообще, — она изучаетъ дѣйствія надъ величинами вообще. Вотъ наиболѣе принятыя опредѣленія. — На основаніи ихъ, во первыхъ, мы заключимъ, что ариѳметика и алгебра не составля-

ютъ отдѣльныхъ частей чистой математики, а одна изъ нихъ часть другой; во вторыхъ мы не поймемъ, чѣмъ онѣ отличаются другъ отъ друга, потому что тщетно будемъ спрашивать чѣмъ отличаются числа отъ величинъ вообще. Да и что такое величины вообще? Вѣдь отвѣтъ, что величиною называется все то, что можетъ увеличиваться и уменьшаться, — не удовлетворитъ насъ.

Но скажутъ: приведенныя нами опредѣленія суть опредѣленія учебниковъ; — они крайне поверхностны, а потому въ нихъ нельзя искать отвѣтовъ на предложенные вопросы. Прекрасно. Но гдѣ же лучшія опредѣленія? — Алгебра есть анализъ уравненій. Вотъ, повидимому, болѣе солидное опредѣленіе алгебры, достаточно рѣзко различающее ее отъ ариѳметики. Хотя и въ ариѳметикѣ мы встрѣчаемъ что то похожее на уравненія, встрѣчаемъ пропорціи, правила тройныя, товарищества, смѣшенія и проч., но тамъ это не болѣе какъ механическая примѣсь, удерживаемая только вслѣдствіе педагогическихъ соображеній, — примѣсь лишняя и не нужная при анализѣ уравненій. И такъ можно, по видимому, характеризовать ариѳметику и алгебру такимъ образомъ: ариѳметика учитъ выполнять дѣйствія надъ числами, алгебра учитъ рѣшать уравненія. Но что значитъ выполнить дѣйствіе? Что значитъ рѣшить уравненіе? Выполнить дѣйствіе значитъ найти искомое — результатъ дѣйствія — на основаніи зависимости его отъ данныхъ; рѣшить уравненіе значитъ, какъ говорятъ, преобразовать его такъ, чтобы въ одной части было неизвѣстное съ коеффиціентомъ и показателемъ равными единицѣ, а въ другой члены извѣстные, — значитъ найти рядъ дѣйствій, которыя нужно произвести надъ данными, чтобъ получить искомое, связанное съ ними уравненіемъ. Но, какъ извѣстно, такимъ образомъ мы неможемъ пока рѣшать всякое уравненіе. Рѣшить уравненіе вообще все еще пока значитъ найти числовую величину неизвѣстнаго на основаніи зависимости его отъ данныхъ, выражаемой уравненіемъ. Итакъ нужно согласиться, что рѣшеніе уравненій есть тоже дѣйствіе.

Чѣмъ же оно отличается отъ дѣйствій, излагаемыхъ въ ариѳметикѣ?

Извѣстно, что дѣйствія раздѣляются на простыя и сложныя. Что такое простыя дѣйствія, — на этотъ вопросъ обыкновенно не даютъ отвѣта, а говорятъ что они суть: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень и извлеченіе корня. Простыя дѣйствія различаются на прямыя (сложеніе, умноженіе и возвышеніе въ степень) и соотвѣтствующія имъ обратныя (вычитаніе, дѣленіе и извлеченіе корня). Понятно, что и сложныя дѣйствія на основаніи того же принципа можно различать на прямыя и обратныя. Обратныя сложныя дѣйствія суть рѣшенія уравненій.

Алгебра занимается слѣдовательно обратными сложными дѣйствіями надъ числами. Это предметъ только одной изъ ея частей — анализа численныхъ уравненій. Но въ ней есть еще двѣ части: общая алгебра и анализъ такъ называемыхъ алгебраическихъ уравненій. Чѣмъ же занимаются онѣ? Онѣ занимаются тоже сложными дѣйствіями надъ числами, прямыми и обратными, но не выполненіемъ ихъ, что относится къ ариѳметикѣ и анализу численныхъ ураненій, а только ихъ преобразованіями: преобразованіемъ одного ряда простыхъ дѣйствій надъ данными въ другой, приводящій къ тому же результату; преобразованіемъ обратнаго сложнаго дѣйствія въ прямое.

Теорія этихъ преобразованій съ неизбѣжной въ ней символикой, съ неизбѣжнымъ употребленіемъ какихъ нибудь новыхъ знаковъ, буквъ напримѣръ, для означенія данныхъ, — вотъ что по мнѣнію нѣкоторыхъ составляетъ собственно алгебру. Независимость ея отъ числовыхъ величинъ данныхъ дала поводъ думать, что алгебра уже не наука о числахъ, а наука о чемъ то высшемъ — наука о величинахъ вообще.

Мнѣніе, что алгебра есть наука о числахъ, можетъ показаться страннымъ. Могутъ замѣтить мнѣ, что въ алгебрѣ подъ буквами разумѣются не только цѣлыя числа, но и дроби, и величины отрицательныя, ирраціональныя и мнимыя. Такъ.

Но величины мнимыя разсматриваются въ алгебрѣ какъ символы дѣйствій надъ числами, а не какъ величины sui generis. Не трудно убѣдиться, что и на другія роды величинъ нужно смотрѣть съ той же точки зрѣнія, если только не желаемъ лишить алгебру надлежащей общности. Дроби напримѣръ въ нѣкоторыхъ случаяхъ, именно въ вопросахъ о недѣлимыхъ предметахъ, такія же мнимыя величины, какъ и квадратныя корни изъ отрицательныхъ чиселъ.

Но мы отвлеклись отъ нашего предмета. Чтожъ такое алгебра? Признать ее за науку о преобразованіяхъ сложныхъ дѣйствій надъ числами было бы довольно раціонально. Но куда же отнести въ такомъ случаѣ одну изъ чрезвычайно важныхъ ея частей — анализъ численныхъ уравненій? Вѣдь отнести ее къ ариѳметикѣ, или къ дифференціальному анализу, какъ то не ловко. Оставить ее въ алгебрѣ, принять, что алгебра есть наука о сложныхъ дѣйствіяхъ надъ числами, и отнести за тѣмъ къ ариѳметикѣ простыя дѣйствія, — вотъ, по видимому, лучшій исходъ. Но чтобъ разграничить ариѳметику отъ алгебры на основаніи такого взгляда на нихъ, нужно разграничить простыя дѣйствія отъ сложныхъ. А какъ ихъ разграничить? Извѣстно, что теорія степеней и корней основывается на началахъ алгебры; не трудно убѣдиться, что въ основаніе теоріи другихъ простыхъ дѣйствій нужно положить тѣже начала, если считать ариѳметику наукой, а не собраніемъ правилъ о томъ, что нужно дѣлать и чего не должно дѣлать.

Пара однако обратиться къ теоріи чиселъ.

Теорія чиселъ есть одна изъ наименѣе законченныхъ, наименѣе установившихся частей математики. Ея границы, ея отношенія къ другимъ частямъ еще не опредѣлены достаточно. Нѣкоторыя изъ истинъ, ее составляющихъ, открыты были въ древности. Евклидъ различалъ уже числа на простыя и составныя; онъ доказалъ, что простыхъ чиселъ безчисленное множество. Эратосфенъ далъ способъ находить простыя числа въ рядѣ чиселъ натуральныхъ. — Съ теченіемъ

времени рядъ подобныхъ истинъ увеличивался, но онъ долго, долго не составлялъ отдѣльнаго цѣлаго; онъ находилъ себя мѣсто въ курсахъ ариѳметики и алгебры. Только въ концѣ прошедшаго столѣтія, послѣ многочисленныхъ открытій Ферма, Эйлера и Лагранжа, теорія чиселъ явилась какъ отдѣльная часть математики въ Essai sur la théorie des nombres Лежандра. Изданное вскорѣ за тѣмъ извѣстное сочиненіе двадцати двухъ-лѣтняго Гаусса Disquisitiones arithmeticae утвердило за ней право на самостоятельность. Лежандръ и Гауссъ создали теорію чиселъ, а потому къ нимъ всего естественнѣе обратиться съ вопросомъ о предметѣ этой части математики и объ отношеніи ея къ другимъ частямъ. Какой же отвѣтъ на вопросъ найдемъ мы въ ихъ сочиненіяхъ? Мы найдемъ разногласіе. По Лежандру теорія чиселъ есть часть неопредѣленнаго анализа; ея задача — рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій въ цѣлыхъ числахъ. Гауссъ не признаетъ теорію чиселъ такою частью неопредѣленнаго анализа; онъ говоритъ, что теорія чиселъ находится въ такомъ же отношеніи къ ней, въ какомъ общій анализъ къ алгебрѣ. Взглядъ Лежандра на созданную имъ науку достаточно опредѣленъ, но не довольно обширенъ, а потому въ настоящее время его не придерживаются. Взглядъ Гаусса обширенъ, но не достаточно опредѣленъ. По мнѣнію Гаусса всѣ возможные вопросы о числахъ цѣлыхъ и даже дробныхъ, кромѣ вопросовъ о выполненіи и преобразованіи дѣйствій надъ ними, входятъ въ область теоріи чиселъ, въ область высшей ариѳметики. Такимъ воззрѣніемъ онъ полагаетъ только предѣлъ ариѳметикѣ и алгебрѣ, но не ограничиваетъ теоріи чиселъ. Ограничить ее онъ предоставляетъ будущему. Это будущее, не смотря на энергическую разработку науки послѣ Гаусса, еще не наступило.

При такомъ состояніи теоріи чиселъ вмѣсто опредѣленія приходится дать общій очеркъ ея содержанія.

При изученіи простыхъ дѣйствій надъ числами, при изученіи ариѳметики, открывается слѣдующее обстоятельство.

Если мы въ какомъ нибудь прямомъ дѣйствіи будемъ принимать за одно изъ данныхъ послѣдовательно всѣ числа натуральнаго ряда, то въ результатѣ будетъ получаться рядъ чиселъ отличный отъ натуральнаго. Такъ при умноженіи натуральныхъ чиселъ на два получается рядъ чиселъ четныхъ.

Непосредственное слѣдствіе отсюда то, что результами обратныхъ дѣйствій не всегда могутъ быть числа. Такъ не всякое число при дѣленіи на два даетъ въ результатѣ цѣлое число. Дѣйствія обратныя приводятъ насъ къ новымъ родамъ величинъ: вычитаніе — къ величинамъ отрицательнымъ, дѣленіе — къ дробямъ, извлеченіе корней — къ величинамъ ирраціональнымъ и мнимымъ.

Естественный вопросъ о признакахъ, по которымъ можно бы было судить, будетъ ли результатомъ даннаго обратнаго дѣйствія какое нибудь число,—привелъ къ изученію свойствъ чиселъ, получаемыхъ при соотвѣтствующихъ прямыхъ дѣйствіяхъ. Вопросъ о признакахъ дѣлимости, признакахъ извлекаемости корня, привелъ къ изученію свойствъ чиселъ кратныхъ, свойствъ степеней чиселъ. Признаки вычитаемости очевидны, — ихъ нѣтъ надобности изучать.

Свойства чиселъ кратныхъ и свойства степеней излагаются въ курсахъ ариѳметики и алгебры. Но, если мы, слѣдуя Гауссу, ограничимъ задачу этихъ наукъ, то должны будемъ теорію кратности чиселъ и извлекаемости изъ нихъ корня отнести къ новой наукѣ — къ теоріи чиселъ.

Что же войдетъ еще въ теорію чиселъ?

Понятно, что не только каждое простое прямое дѣйствіе надъ числами, но и каждое сложное прямое будетъ давать въ результатѣ особый безконечный рядъ чиселъ, если мы будемъ принимать въ немъ за одно изъ данныхъ послѣдовательно всѣ числа натуральнаго ряда. Понятно за тѣмъ, что принимая измѣняющимся такимъ образомъ не одно только изъ данныхъ, но два, три и болѣе, мы придемъ къ новымъ рядамъ.

Изученіе свойствъ чиселъ каждаго изъ этихъ рядовъ имѣетъ

интересъ и важность, въ томъ же отношеніи, какъ напримѣръ изученіе свойствъ чиселъ кратныхъ. Оно должно войти и входитъ въ теорію чиселъ.

Всякое дѣйствіе на языкѣ математики выражается формулою.

Числа каждаго изъ нашихъ безконечныхъ рядовъ, какъ результаты одного и того же дѣйствія надъ измѣняющимися данными, представляются одною и тою же алгебраическою формулою, представляются, говоря технически, одною и тою же формою.

Теорія чиселъ занимается изученіемъ формъ, изученіемъ свойствъ чиселъ представляемыхъ формами, изученіемъ представляемости чиселъ формами.

Чтобъ не ввести въ заблужденіе, я долженъ оговориться. Вопросъ о представляемости чиселъ формами не единственный и, пожалуй, не самый главный вопросъ въ теоріи чиселъ: въ массѣ другихъ онъ даже какъ то стушевывается. Но если мы увлечемся желаніемъ видѣть въ этой наукѣ не аггрегатъ истинъ, а что то цѣлое, что то связанное нѣкоторою общею идеею, то должны будемъ поставить помянутый вопросъ на первомъ планѣ. Онъ вызвалъ другіе; онъ только способенъ объединить содержимое теоріи чиселъ.

Чтобъ видѣть развѣтвленіе вопроса о представляемости чиселъ формами, войдемъ въ нѣкоторыя подробности, на сколько то возможно въ общемъ очеркѣ.

Представляется ли данное число данною формою, — этотъ вопросъ можно рѣшить непосредственно, составляя рядъ чиселъ, представляемыхъ формою. Но такой путь рѣшенія излишенъ и сложенъ. Естественно искать простѣйшихъ. Гдѣ же искать? Представляется вопросъ: не обусловливается ли представляемостью даннаго числа данною формою представляемость его другими простѣйшими формами того же вида? Это можетъ случиться и дѣйствительно случается. Такъ, если число представляется формою $6x$ т. е. если оно кратно 6-ти, то оно представляется формами $2x$ и $3x$ т. е. кратно 2-хъ и 3-хъ. Отсюда возникаютъ вопросы о содержимости формъ

одной въ другой, о эквивалентности формъ, о числѣ эквиваленныхъ формъ и т. д. Представляется вопросъ: не обусловливается ли представляемостью даннаго числа данною формою представляемость ею же другаго числа, извѣстнымъ образомъ составленнаго изъ даннаго, извѣстной функціи даннаго. И это можетъ случиться и дѣйствительно случается. Такъ напримѣръ если число кратно трехъ, то кратна же трехъ и сумма цифръ составляющихъ это число, выраженное въ десятичной системѣ. Отсюда возникаетъ вопросъ о свойствахъ функцій чиселъ, представляемыхъ формами. Представляется вопросъ: не обусловливается ли представляемостью даннаго числа данною формою представляемость его другою формою, инаго вида. Это можетъ случиться и случается. Примѣровъ столь же простыхъ, какъ приведенныя сейчасъ, дать нельзя, а потому ограничимся только заявленіемъ факта и замѣтимъ, что отсюда возникаетъ вопросъ о совмѣстной представляемости чиселъ формами различнаго вида.

Теорія чиселъ изучаетъ представляемость чиселъ формами. На основаніи того, что я говорилъ до сихъ поръ, можно бы было къ слову формами прибавить алгебраическими, раціональными, цѣлыми, съ цѣлыми коэффиціентами. Но такое прибавленіе не вполнѣ согласно съ истиной. Въ теорію чиселъ входятъ въ настоящее время не только алгебраическія формы, но и трансцендентныя, — по крайней мѣрѣ одна изъ трансцедентныхъ — показательная (a^x). Это одно можетъ служить уже залогомъ, что со временемъ число изучаемыхъ трансцендентныхъ формъ значительно увеличится.

Понятно, что въ томъ же отношеніи, въ какомъ изучаетъ числа теорія чиселъ, можно изучать и другія роды величинъ: величины отрицательныя, дробныя, ирраціональныя, мнимыя. Нѣкоторыя изъ нихъ уже изучаются въ этомъ отношеніи, хотя не такъ интенсивно, какъ числа. Отрицательныя цѣлыя числа изучаются въ той же мѣрѣ какъ и положительныя; они обыкновенно даже не отдѣляются отъ послѣднихъ при изученіи. Теоріи чиселъ дробныхъ уже положено начало. Гауссъ при-

знаетъ ее частью теоріи чиселъ. Гауссъ же въ своемъ сочиненіи Theoria residuorum biquadraticorum ввелъ въ теорію чиселъ изученіе мнимыхъ цѣлыхъ чиселъ, или, какъ ихъ называютъ, комплексныхъ цѣлыхъ чиселъ т. е. величинъ представляемыхъ формою $a+b\sqrt{-1}$, гдѣ a и b какія нибудь цѣлыя числа.

Принявши въ расчетъ все это, нельзя не предложить вопроса: почему не ввести въ теорію чиселъ изученіе остальныхъ видовъ величинъ, величинъ ирраціональныхъ и мнимыхъ вообще; почему за тѣмъ не изучать всѣхъ возможныхъ формъ.

Могутъ спросить: есть ли интересъ изучать величины ирраціональныя и мнимыя вообще въ тѣхъ же отношеніяхъ, какъ числа. Есть, конечно. При изученіи чиселъ мы имѣемъ въ виду вопросъ о признакахъ, по которымъ можно бы было судить, будетъ ли результатомъ извѣстнаго обратнаго дѣйствія какое нибудь число. Вопросъ, можетъ ли быть этимъ результатомъ не только какое нибудь число, но и величина ирраціональная, или мнимая, — не менѣе интересенъ и важенъ. Еслибъ мы, напримѣръ, пришли къ заключенію, что какое нибудь обратное дѣйствіе будетъ давать въ результатѣ числа, дроби, величины ирраціональныя и мнимыя не всегда, а только при извѣстныхъ условіяхъ, то должны бы были признать существованіе новаго рода величинъ, отличныхъ отъ всѣхъ намъ извѣстныхъ. Такимъ образомъ изученіе представляемости величинъ формами можетъ открыть новые роды величинъ, если они существуютъ, или убѣдить, что ихъ нѣтъ.

Вслѣдствіе приведенныхъ соображеній изученіе представляемости формами величинъ ирраціональныхъ и мнимыхъ можетъ быть интересно и важно. Но можетъ ли и должно ли оно войти въ область теоріи чиселъ? Вѣдь онѣ не числа. Это правда, но и комплексныя цѣлыя числа — не болѣе числа, чѣмъ величины ирраціональныя и мнимыя вообще. Одинъ только есть поводъ исключить эти послѣднія изъ теоріи чиселъ: это желаніе не увеличивать слишкомъ размѣровъ науки.

Но въ такомъ случаѣ нужно выдѣлить изъ нея и дроби, и сложныя цѣлыя числа, и создать за разъ нѣсколько наукъ: теорію чиселъ, теорію дробей, теорію величинъ ирраціональныхъ, теорію величинъ мнимыхъ и, если есть еще какіе нибудь роды величинъ, то теоріи ихъ. Только ли? Пожалуй не только. Почему не возможна теорія величинъ трансцендентныхъ, теорія величинъ безконечно малыхъ?

(Изъ 2-го тома Математическаго Сборника. Москва, 1867 г.)

Въ Университ. типографіи (Катковъ и К[0]), на Страстн. бульварѣ.